SESSION DE 1994

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Sujet commun ENS : Ulm et Cachan)

DURÉE : 4 heures

Préambule

Ce préambule comprend divers notations et résultats que les candidats pourront utiliser sans démonstration.

On désigne par E l'espace vectoriel sur le corps des complexes $\mathbb{C}$ formé par les fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et qui sont **périodiques de période** 2π.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, $e_n \in$ E est l'élément $e_n(x) = e^{inx}$, $x \in \mathbb{R}$. À f et g dans E, on associe le nombre complexe :

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(x)\, g(x)\, dx$$

et on note $\| f \|_2 = \sqrt{(f, f)}$. On admettra que $(\,,\,)$ est un produit scalaire qui fait de E un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$.

On désigne par $\| \cdot \|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur E :

$$\| f \|_\infty = \sup \{ |f(x)|,\ x \in \mathbb{R} \}.$$

On admettra que E muni de cette norme est complet.

Pour $N \in \mathbb{N}$, E_N désigne l'espace vectoriel engendré par les e_n pour $n \in \mathbb{Z}$, $n \in [-N, N]$. On désigne par D_N l'élément de E_N : $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$ et on pourra utiliser que, pour $x \in]0, 2\pi[$,

$$D_N(x) = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathbb{F}_m$ l'anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ des classes d'équivalence dans $\mathbb{Z}$ modulo m.

Étant donné une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, on dira que « la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est absolument convergente » (en abrégé $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une S.A.C.) si la série de terme général $(|u_{-n}| + |u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On notera alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$ ou $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ la somme de cette série où :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n = u_0 + \sum_{n \geq 1} (u_{-n} + u_n).$$

On admettra sans démonstration que tous les résultats sur les S.A.C. indexées par $\mathbb{N}$ s'étendent aux S.A.C. indexées par $\mathbb{Z}$ et par exemple si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont telles que $(|a_n|^2 + |b_n|^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C., alors $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C. et

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n\right| \leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz).

Dans tout le problème, N désignera un entier supérieur ou égal à 1 qui pourra varier.

PREMIÈRE PARTIE

À $f \in E$, on associe la suite de ses coefficients de Fourier $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$f_n = (e_n, f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx.$$

I.1. Soit $f \in E$, montrer que $(|f_n|^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C. et que sa somme est $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx$.

I.2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une S.A.C., on désigne par S_N l'élément de E : $S_N = \sum_{n=-N}^{N} u_n e_n$. Montrer que $(S_N)_{N\geqslant 1}$ converge vers un élément u de E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Quels sont les coefficients de Fourier de u ?

I.3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par $u_n = 0$ pour $n \leqslant 0$, $u_1 = -1$ et $u_n = \frac{1}{n(n-1)}$ pour $n \geqslant 2$.

Montrer que l'élément u de E obtenu par le procédé de la question I.2. n'est pas dérivable en $x = 0$ (on pourra écrire pour $N \geqslant 2$ arbitraire et $x \neq 0$,

$$\operatorname{Im}\frac{u(x) - u(0)}{x} = \operatorname{Im}\frac{S_N(x) - S_N(0)}{x} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n-1)x}$$

Im z désignant la partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$ et conclure en prenant $x = \frac{1}{N}$).

I.4. On désigne par $\sum_N$ l'élément de E : $\sum_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{e_n}{n}$.

Montrer que la suite $\left(\sum_N\right)_{N\geqslant 1}$ est de Cauchy dans E pour la norme $\|\cdot\|_2$.

I.5. Montrer que si la suite $\left(\sum_N\right)_{N\geqslant 1}$ converge vers $\sigma \in E$ pour la norme $\|\cdot\|_2$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = (e^{ix} - 1)\,\sigma(x)$$

où u a été définie en I.3.

I.6. Déduire des questions I.3. et I.5. que E muni de la norme $\|\cdot\|_2$ n'est pas complet.

DEUXIÈME PARTIE

II.1. Étant donné $f \in E$, montrer qu'il existe un et un seul élément g de E_N tel que $\| g - f \|_2$ réalise le minimum de $\| h - f \|_2$ lorsque h parcourt E_N.

On notera $P_N f$ au lieu de g.

II.2. Montrer que P_N est un projecteur de E sur E_N et que pour tout $f \in E$,

$$\| P_N f \|_2 \leqslant \| f \|_2 .$$

II.3. *a.* Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(P_N f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, D_N(x - y)\, dy.$$

b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(P_N f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - y)\, D_N(y)\, dy.$$

II.4. On désigne par α_N la borne supérieure de l'ensemble des nombres $\| P_N f \|_\infty$ lorsque f décrit la boule unité de $(E, \| \cdot \|_\infty)$. Montrer que $\alpha_N \leqslant \sqrt{2N + 1}$.

II.5. On désigne par L_N le nombre $L_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\, dx$, et pour $\varepsilon > 0$, ψ_N^ε l'élément de E défini par :

$$\psi_N^\varepsilon(x) = \frac{D_N(x)}{\sqrt{\varepsilon + D_N^2(x)}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer, en utilisant les ψ_N^ε, que $\alpha_N \geqslant L_N$ (on pourra montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$0 \leqslant |y| - \frac{y^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + y^2}} = \frac{\varepsilon |y|}{\sqrt{\varepsilon + y^2}\,(\sqrt{\varepsilon + y^2} + |y|)} \leqslant \sqrt{\varepsilon}\,).$$

II.6. Montrer que lorsque N tend vers l'infini, L_N est équivalent à $\frac{4}{\pi^2} \operatorname{Log} N$.

II.7. Que pouvez-vous en conclure (en vous inspirant de la question II.2.) ?

TROISIÈME PARTIE

On désigne par H_1 le sous-espace de E formé par les éléments f tels que $((1 + n^2)|f_n|^2)$ est une S.A.C.

On note alors pour $f \in H_1$, $\| f \|_1 = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2)\, |f_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

III.1. Montrer que si $f \in E$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, alors $f \in H_1$ et $\| f \|_1^2 = \| f \|_2^2 + \| f' \|_2^2$. Réciproquement si $f \in H_1$, f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

III.2. Montrer que $E_1 = \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap E$ est dense dans E pour la norme $\| \cdot \|_1$.

III.3. Soit $f \in H_1$, montrer que :

$$\| P_N f - f \|_2 \leqslant \frac{1}{N+1} \| f \|_1 .$$

III.4. En écrivant, pour $g \in E_1$, x et y dans $\mathbb{R}$,

$$g^2(x) - g^2(y) = 2 \int_y^x g(t)\, g'(t)\, dt,$$

montrer qu'il existe une constante $K_1 \in]0, +\infty[$ telle que pour tout $f \in H_1$, $\| f \|_\infty \leqslant K_1 \| f \|_2^{\frac{1}{2}} \| f \|_1^{\frac{1}{2}}$.

III.5. En déduire que pour tout $f \in H_1$ et $N \geqslant 1$,

$$\| P_N f - f \|_\infty \leqslant \frac{K_1}{\sqrt{N+1}} \| f \|_1$$

et expliquer brièvement l'intérêt de cette inégalité en terme d'approximation de fonctions et justifier l'introduction de l'espace H_1.

QUATRIÈME PARTIE

IV.1. Montrer que si $f \in H_1$, $\| f \|_2 \leqslant \| f \|_1$.

IV.2. Montrer que $\| \cdot \|_1$ est une norme sur H_1 et que H_1 muni de cette norme est complet.

IV.3. Montrer qu'il existe une constante K_2 telle que pour tout $f \in H_1$, $\| f \|_\infty \leqslant K_2 \| f \|_1$.

IV.4. Soit $(g^p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H_1 telle que :

$$\| g^p \|_1 \leqslant 1, \forall p \in \mathbb{N}.$$

a. Montrer qu'il existe une application strictement croissante ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la suite des produits scalaires $((g^{\psi(p)}, e_n))_{p \in \mathbb{N}}$ soit convergente. On note alors ℓ_n la limite de cette suite.

b. Montrer que la suite de fonctions S_N, où $S_N = \sum_{n=-N}^{N} \ell_n e_n$ converge vers une fonction $\ell \in E$ pour la norme $\| \cdot \|_\infty$.

c. Montrer que $\ell \in H_1$.

d. Montrer, par un exemple, qu'en général $\| g^{\psi(p)} - \ell \|_1$ ne tend pas vers zéro lorsque p tend vers $+\infty$.

CINQUIÈME PARTIE

On désigne par x_j le point $\frac{2\pi}{2N+1} j$ pour $j \in \mathbb{Z}$. On observe alors que pour $f \in E$, $f(x_j)$ ne dépend que de la classe de j modulo $2N+1$, ce qui permet de parler de $f(x_j)$ pour $j \in \mathbb{F}_{2N+1}$.

V.1. Montrer que la matrice carrée d'ordre $2N+1$: $(e^{i\ell x_j})_{\substack{0 \leqslant \ell \leqslant 2N \\ 0 \leqslant j \leqslant 2N}}$ a pour inverse la matrice :

$$\left(\frac{1}{2N+1} e^{-i\ell x_j} \right)_{\substack{0 \leqslant \ell \leqslant 2N \\ 0 \leqslant j \leqslant 2N}}.$$

V.2. *a.* Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe un unique élément de E_N (noté $C_N f$) tel que :

$$(C_N f)(x_j) = f(x_j), \quad \forall j \in \mathbb{F}_{2N+1}.$$

b. Montrer que C_N est une application linéaire de E dans E_N.

c. Montrer que $C_N \neq P_N$ (on pourra remarquer que $C_N e_{2N+1} = e_0$).

V.3. On désigne par $\mathscr{E}_{2N+1}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{F}_{2N+1}$ dans $\mathbb{C}$, on note $(z_k)_{k\in\mathbb{F}_{2N+1}}$ ces applications.

a. À $z \in \mathscr{E}_{2N+1}$, on associe l'application $\hat{z}$: $k \longmapsto \hat{z}_k$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\hat{z}_\ell = \frac{1}{2N+1} \sum_{k\in\mathbb{F}_{2N+1}} e^{-i\ell x_k} z_k.$$

Montrer que $\hat{z}_\ell$ ne dépend que de la classe de ℓ modulo $2N+1$. Ceci nous permet de considérer $\hat{z}$ comme un élément de $\mathscr{E}_{2N+1}$.

b. On dit que $\hat{z}$ est la transformée de Fourier discrète (T.F.D.) de z. On note $\varphi = (\varphi_k)_{k\in\mathbb{F}_{2N+1}}$ la T.F.D. de l'application $j \longmapsto f(x_j)$. Montrer que :

$$C_N f = \sum_{k=-N}^{N} \varphi_{\check{k}}\, e_k$$

où $\check{k}$ est la classe de k modulo $2N+1$.

V.4. Soit $h \in E_{2N}$, montrer que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\,dx = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} h(x_j).$$

V.5. *a.* Pour f et g dans E, on note :

$$[f, g] = \frac{1}{2N+1}\sum_{j\in\mathbb{F}_{2N+1}} \overline{f(x_j)}\, g(x_j).$$

Montrer que si f et g sont dans E_N, $[f, g] = (f, g)$.

b. Montrer que pour tout f, g dans E,

$$[f - C_N f, g] = 0.$$

c. Calculer $[e_n, e_m]$.

V.6. Soit $f \in H_1$ et $\ell \in \mathbb{Z}$. Montrer que $(f_{\ell+(2N+1)k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C. et que :

$$C_N(f) = \sum_{\ell\in\mathbb{F}_{2N+1}} C_{N,\ell}(f)\, e_\ell$$

où

$$C_{N,\ell}(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{\ell+(2N+1)k}.$$

V.7. *a.* Montrer que pour tout $f \in E$, on a :

$$f - C_N f = g_N - C_N g_N \quad \text{avec} \quad g_N = f - P_N f.$$

b. Montrer qu'il existe une constante $K_3 \in]0, +\infty[$ telle que pour tout $f \in H_1$,

$$\|f - C_N f\|_2 \leqslant \frac{K_3}{N+1}\|f\|_1.$$

V.8. Pour quelle raison pratique préfère-t-on C_N à P_N ?

SIXIÈME PARTIE

On se donne un entier $M \geqslant 1$ et on désigne par ω un nombre complexe tel que $\omega^M = 1$. À tout élément z de $\mathscr{E}_M$ ($\mathscr{E}_M$ est l'ensemble des applications de $\mathbb{F}_M$ dans $\mathbb{C}$), on associe l'élément $\hat{z}$ de $\mathscr{E}_M$ défini par :

$$\hat{z}_\ell = \sum_{k \in \mathbb{F}_M} \omega^{k\ell} z_k$$

et on note $\hat{z}$ = T.F.D. $(\omega, M)(z)$.

VI.1. En considérant que les $\omega^{k\ell}$ ont été calculés une fois pour toutes, quel est le nombre d'opérations (additions et multiplications) nécessaires pour obtenir $\hat{z}$ en fonction de z ? On notera S_M ce nombre.

VI.2. On suppose que M est pair : $M = 2M_1$. En remarquant que :

$$\hat{z}_\ell = \sum_{k_1 \in \mathbb{F}_{M_1}} \omega^{2k_1\ell} z_{2k_1} + \sum_{k_2 \in \mathbb{F}_{M_1}} \omega^{(2k_2-1)\ell} z_{2k_2-1}$$

montrer que T.F.D. (ω, M) peut s'effectuer à l'aide de deux opérations T.F.D. (ω^2, M_1).

VI.3. On suppose que $M = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. On désigne par $\sum_n$ le nombre d'opérations pour effectuer T.F.D. $(\chi, 2^n)$ où $\chi \in \mathbb{C}$ vérifie $\chi^{2^n} = 1$. Montrer que $\sum_n \leqslant 2 \sum_{n-1} + 2^{n+1}$ et en déduire que :

$$\sum_n \leqslant 2M \log_2 M$$

(où $\log_2 M = n$ par définition).

VI.4. En supposant que les calculs sont effectués sur un ordinateur faisant 10^8 opérations par seconde, comparer les temps de calculs correspondant à S_M avec $M = 2^n$ et $\sum_n$ pour $n = 20, 25$ et 30. On représentera les résultats sous forme d'un tableau.

VI.5. On suppose plus généralement que $M = PQ$ où P et Q sont deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer que T.F.D. (ω, M) peut se faire en $2M(P + Q)$ opérations.

VI.6. Appliquer ce qui précède au calcul de $C_N f$ pour $f \in H_1$.